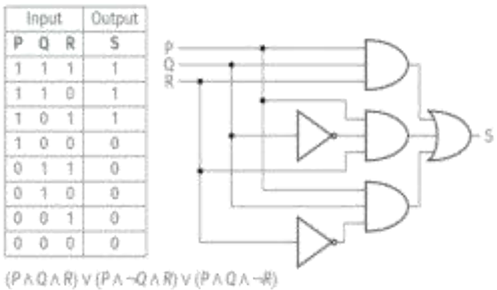
University of BOUIRA
Faculty of sciences
Department of Informatics

Module Logique Mathematique

2ème Année Licence

Cours 4

Logique des propositions



les bases (3)

BY : BENAISSI Sellami
s.benaissi@gmail.com

OCT 2022

PLAN

Part 1

Rappelle

RAPPELLE

formules particulières

Formule satisfiable Une formule $\boldsymbol{\alpha}$ est dite **satisfiable** ssi : Etant donné la table de vérité de $\boldsymbol{\alpha}$, il existe **au moins une** ligne dans sa table de vérité où la valeur de vérité est **vraie**

Ensemble satisfiable Un ensemble de formules T = $\{\boldsymbol{\alpha 1}, \boldsymbol{\alpha 2}, .., \boldsymbol{\alpha n}\}$ est dit **satisfiable** ssi : Etant donné la table de vérité de $\boldsymbol{\alpha 1}, \boldsymbol{\alpha 2}, .., \boldsymbol{\alpha n}$, il existe **au moins une** ligne où $\boldsymbol{\alpha 1}, \boldsymbol{\alpha 2}, .., \boldsymbol{\alpha n}$ sont **vraies simultanément**

Tautologie Une formule $\boldsymbol{\alpha}$ est dite **Tautologie** (formule valide) ssi : Etant donné la table de vérité de $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}$ est **vraie** sur toutes les lignes. (On note : $\models \boldsymbol{\alpha}$)

Antilogie Une formule $\boldsymbol{\alpha}$ est dite **Antilogie** (anti-tautologie, formule insatisfiable) ssi : Etant donné la table de vérité de $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}$ est fausse sur toutes les lignes

RAPPELLE

formules particulières

conséquence logique Une formule $\boldsymbol{\beta}$ est dite **conséquence logique** de $\boldsymbol{\alpha}$ ssi : Etant donné les tables de vérité de $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\beta}$ **est vraie** sur toutes les lignes où **$\boldsymbol{\alpha}$ est vraie** (on note $\boldsymbol{\alpha} \models \boldsymbol{\beta}$)

conséquence logique d'un ensemble Une formule $\boldsymbol{\beta}$ est dite **conséquence logique d'un ensemble** de formule T $=\{\boldsymbol{\alpha 1}, \boldsymbol{\alpha 2},..., \boldsymbol{\alpha n}\}$ ssi : Etant donné les tables de vérité de T, $\boldsymbol{\beta}$ est vraie sur toutes les lignes où T est vraie (les formules $\boldsymbol{\alpha 1},\boldsymbol{\alpha 2},...,\boldsymbol{\alpha n}$ sont vraies simultanément) (on note $\{\boldsymbol{\alpha 1}, \boldsymbol{\alpha 2},..., \boldsymbol{\alpha n}\} \models \boldsymbol{\beta}$)

Equivalence logique Deux formules $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ sont **équivalentes** si elles ont les **mêmes valeurs** dans toutes les interprétations.(on note $\boldsymbol{\alpha} \equiv \boldsymbol{\beta}$)

Un modèle d'une formule **Un modèle d'une formule** propositionnelle f est une valuation V tel que **V[f] = Vrai**

compatibilité Une formule propositionnelle est dite **compatible** SSI elle a au moins un modèle.

Part 2

Théorèmes

Théorème de substitution

Théorème de substitution

Soient α une formule contenant la variable propositionnelle **A**, et α' la formule obtenue en substituant toutes les occurrences de **A** par la formule β. Alors : $\models \alpha \Rightarrow \models \alpha'$

Théorème de substitution

Théorème de substitution

Exemple 1 :

Si l'on sait que la formule $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$ est une tautologie (c'est le cas), alors la substitution de toutes les occurrences de A par une autre formule quelconque, par exemple $A \rightarrow B$, (cela donne la formule $((A \rightarrow B) \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge (A \rightarrow B))$, est encore une tautologie.

Exemple 2 :

$\alpha: A \wedge B \rightarrow A \vee \neg B,$ $\alpha': A \wedge \neg B \rightarrow A \vee \neg\neg B$

Théorème de substitution

Théorème de substitution

Exemple 3 :

Si on montre que la formule $(A \land B) \to A$ est une tautologie, alors on peut déduire en appliquant le théorème de substitution que $(A \land \neg C) \land (C \to D) \to (A \land \neg C)$ est une tautologie.

En effet, La substitution des occurrences de

- A par la formule $(A \land \neg C)$ et celles de
- B par $(C \to D)$

dans la formule $(A \land B) \to A$ permet d'assurer ce résultat.

Théorème de remplacement

Théorème de remplacement

Soient α une formule contenant β et α' la formule obtenue en remplaçant β par β'. Alors:

$$\beta \equiv \beta' \Rightarrow \alpha \equiv \alpha'.$$

Part 3

Les Formes Normales

Définitions

Littéral

On appelle littéral associé à une variable propositionnelle **A** chacune des deux expressions **A** ou **¬A**. (i.e. la variable elle-même et sa négation).

On appel «littéral», une proposition élémentaire (atome) ou la négation d'une proposition

Définitions

Clause

On appel « clause », une disjonction de littéraux

Exemple :

- $A \vee B$
- $\neg A \vee B$
- $A \vee \neg B$

Définitions

Etant données deux variables propositionnelles **A** et **B** on peut construire les conjonctions et disjonctions de littéraux suivantes:

Conjonction de littéraux	Disjonction de littéraux
$\phi_1 = A \wedge B$	$\Psi_1 = A \vee B$
$\phi_2 = \neg A \wedge B$	$\Psi_2 = \neg A \vee B$
$\phi_3 = A \wedge \neg B$	$\Psi_3 = A \vee \neg B$
$\phi_4 = \neg A \wedge \neg B$	$\Psi_4 = \neg A \vee \neg B$

Définitions

D'une manière générale:

Considérons le littéral **Ãi**

$$\tilde{A}i = \begin{cases} A_i \\ \text{ou} \\ \neg Ai \end{cases}$$

Forme normale conjonctive (FNC)

Une formule α est **sous forme normale conjonctive** si elle est de la forme $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$ tel que les C_i sont de la forme $L_1 \vee L_2 \vee \ldots\ldots \vee L_n$ (les L_i sont des littéraux, les C_i sont des clauses)

On appelle forme normale conjonctive (FNC) toute conjonction de disjonction de littéraux.

Forme normale conjonctive (FNC)

Exemple 1 :

- $(P \lor Q) \land (P \lor S)$
- $(P \lor Q \lor R) \land (P \lor S)$
- $P \land (P \lor S)$
- $P \land \neg Q$

Forme normale conjonctive (FNC)

Théorème :

Pour chaque formule α, il existe une formule α' écrite sous **FNC** tel que $\alpha \equiv \alpha'$

Forme normale disjonctive (FND)

Une formule α est **sous forme normale disjonctive** si elle est de la forme $C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_n$ tel que les C_i sont de la forme $L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_n$ (les L_i sont des littéraux)

On appelle forme normale disjonctive (FND) toute disjonction de conjonction de littéraux.

Forme normale disjonctive (FND)

Exemple 1 :

- $(P \land Q) \lor (P \land S)$
- $(P \land Q \land \neg R) \lor (P \land S)$
- $P \lor (P \land S)$
- $P \lor Q$

Forme normale disjonctive (FND)

Théorème :

Pour chaque formule α, il existe une formule α' écrite sous **FNC** tel que $\alpha \equiv \alpha'$

Règles de transformation FNC & FND

Règles de transformation FNC & FND

1. Eliminer les connecteurs logiques $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$:
   - ✓ $\mathbf{P \rightarrow Q \equiv \neg P \lor Q}$
   - ✓ $\mathbf{P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow P)}$
2. Ramener les signes de négation immédiatement avant les atomes :
   - ✓ $\mathbf{\neg(\neg P) \equiv P}$
   - ✓ $\mathbf{\neg(P \land Q) \equiv \neg P \lor \neg Q}$
   - ✓ $\mathbf{\neg(P \lor Q) \equiv \neg P \land \neg Q}$
3. Distribuer $\land$ et $\lor$ l'un par rapport à l'autre :
   - ✓ $\mathbf{P \lor (Q \land R) \equiv (P \lor Q) \land (P \lor R)}$
   - ✓ $\mathbf{P \land (Q \lor R) \equiv (P \land Q) \lor (P \land R)}$

Règles de transformation FNC & FND

Règles de transformation FNC & FND

Exercice 1 :

Ecrire sous FNC et FND les formules suivantes

$$P \rightarrow Q$$

$$P \leftrightarrow Q$$

Règles de transformation FNC & FND

Exercice 1 (Solution) :

Ecrire sous FNC et FND les formules suivantes $P \rightarrow Q$ $P \leftrightarrow Q$

$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ (FND)

$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ (FNC)

$P \wedge P \equiv P$

$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$ (FNC)

$\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P)$

$\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P)$ (FND)

$P \wedge \neg P \equiv F$

$P \vee \neg P \equiv V$

Tiers exclus

Règles de transformation FNC & FND

Règles de transformation FNC & FND

Exercice 2 :

Ecrire sous FNC et FND les formules suivantes

$$(P \rightarrow \neg Q) \land (\neg P \rightarrow \neg S)$$

$$\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \lor (R \rightarrow Q)$$

Règles de transformation FNC & FND

Règles de transformation FNC & FND

Exercice 2 (Solution) :

Ecrire sous FNC et FND les formules suivantes $(P \rightarrow \neg Q) \land (\neg P \rightarrow \neg S)$

$$(P \rightarrow \neg Q) \land (\neg P \rightarrow \neg S) \equiv (\neg P \lor \neg Q) \land (\neg\neg P \lor \neg S)$$

$$\equiv (\neg P \lor \neg Q) \land (P \lor \neg S) \quad \text{(FNC)}$$

$$\equiv (\neg P \land P) \lor (\neg P \land \neg S) \lor (\neg Q \land P) \lor (\neg Q \land \neg S)$$

$$\equiv (\neg P \land \neg S) \lor (\neg Q \land P) \lor (\neg Q \land \neg S) \quad \text{(FND)}$$

Règles de transformation FNC & FND

Utilisation de la table de vérité

Comment construire une FND?

Soit α une formule contenant **N** variables propositionnelles A1,…,An.

1. Etablir la table de vérité de α
2. Déterminer l'ensemble des lignes I={I1,…,Im} de la table de vérité telles que α **= vrai**
3. Pour chaque ligne $i \in I$, on détermine $\phi i = \tilde{A}1 \wedge \tilde{A}2 \wedge \ldots \wedge \tilde{A}n$ où

$$\tilde{A}i = \begin{cases} A_i \text{ si } Ai = \text{vrai} \\ \neg Ai \text{ si } Ai = \text{faux} \end{cases}$$

4. On détermine ϕ de la manière suivante: $\phi = \phi 1 \vee \phi 2 \vee \ldots \vee \phi m$
5. Si α est une antilogie alors $\phi = Ai \wedge \neg Ai$

Règles de transformation FNC & FND

Utilisation de la table de vérité

Comment construire une **FNC**?

Soit α une formule contenant **N** variables propositionnelles A1,…,An.

1. Etablir la table de vérité de α
2. Déterminer l'ensemble des lignes I={I1,…,Im} de la table de vérité telles que α = **Faux**
3. Pour chaque ligne i∈I, on détermine $\Psi i = \tilde{A}1 \vee \tilde{A}2 \vee \ldots \vee \tilde{A}n$ où

$$\tilde{A}i = \begin{cases} \neg A_i \text{ si } Ai = \text{vrai} \\ Ai \text{ si } Ai = \text{faux} \end{cases}$$

4. On détermine Ψ de la manière suivante: $\Psi = \Psi 1 \wedge \Psi 2 \wedge \ldots \wedge \Psi m$
5. Si α est une tautologie alors $\Psi = Ai \vee \neg Ai$

Règles de transformation FNC & FND

Utilisation de la table de vérité

Exercice 1 :

Ecrire sous FNC et FND les formules suivantes $P \leftrightarrow Q$

P	Q	P↔Q	
V	V	V	FND
V	F	F	FNC
F	V	F	FNC
F	F	V	FND

FND = $(P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$

FNC = $(\neg P \lor Q) \land (P \lor \neg Q)$

Système complet de connecteurs

Système complet de connecteurs

Un ensemble **S** de connecteurs est dit complet si :

Etant donné une formule α quelconque, on peut trouver une formule α' dans laquelle on ne trouve que les connecteurs de **S** tel que $\alpha \equiv \alpha'$

Système complet de connecteurs

Système complet de connecteurs SCC

Exemple 1 :

$S = \{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$

- $\neg P$
- $P \wedge Q$
- $P \vee Q$
- $P \rightarrow Q$
- $P \leftrightarrow Q$

S est un système complet

Système complet de connecteurs

Système complet de connecteurs SCC

Exemple 1 :

Montrer que l'ensemble **S = {¬,∨}** forme un système complet

- ✓ $\neg P \equiv \neg P$
- ✓ $P \wedge Q \equiv \neg\neg(P \wedge Q) \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$
- ✓ $P \vee Q \equiv P \vee Q$
- ✓ $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
- ✓ $P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$

$$\equiv \neg\neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P))$$

$$\equiv \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))$$

S = {¬,∨} est un système complet

Thank you